OM
EN GENEREL I STORE HELE TAL ULØSBAR LIGNING

Af

AXEL THUE

(Videnskabs-Selskabets Skrifter. I. Math.-Naturv. Klasse 1908. No. 7)

UDGIVET FOR FRIDTJOF NANSENS FOND.

CHRISTIANIA
I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD
1908

Fremlagt i Møde i den math.-naturv. Klasse 31te Januar 1908.

A. W. BRØGGERS BOGTRYKKERI.

Theorem.

Er $F(x)$ en hvilkensomhelst hel irreduktibel funktion i x med hele koefficienter og af r'te grad, hvor $r > 2$, da har ligningen

$$q^r F\left(\frac{p}{q}\right) = c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

hvor c er et vilkaarlig opgivet helt tal, kun et begrændset antal løsninger i hele tal p og q.

Er c forskjellig fra nul, saa har ligningen kun et begrændset antal heltallige løsninger, hvis ikke $F(x)$ er en potents af en hel funktion af første eller anden grad med hele koefficienter.

I.

Sætter man

$$(x-\varrho)^m = A_1^m(x)\,\varrho^{r-1} + A_2^m(x)\,\varrho^{r-2} + \cdots + A_{r-1}^m(x)\,\varrho + A_r^m(x)$$

hvor m er et vilkaarligt helt positivt tal, medens $F(\varrho) = 0$, da kan man bestemme en saadan af bare koefficienterne i $F(x)$ afhængig — og altsaa af m uafhængig — positiv størrelse t, at hver koefficient i hver af de hele funktioner A^m i talværdi er mindre end t^m.

Er nemlig

$$\varrho^r = a_1\varrho^{r-1} + a_2\varrho^{r-2} + \cdots + a_{r-1}\varrho + a_r \qquad \cdots\cdots (2)$$

saa faaes jo:

$$(x-\varrho)^{m+1} = (xA_1^m - a_1A_1^m - A_2^m)\,\varrho^{r-1} + (xA_2^m - a_2A_1^m - A_3^m)\,\varrho^{r-2} +$$

$$\cdots\cdots + (xA_{r-1}^m - a_{r-1}A_1^m - A_r^m)\,\varrho + (xA_r^m - a_rA_1^m)$$

Sættes paa lignende maade

$$\begin{aligned}
(x-\varrho)^n &= B_1^0(x)\varrho^{r-1} + B_2^0(x)\,\varrho^{r-2} + \cdots\cdots + B_{r-1}^0(x)\,\varrho + B_r^0(x)\\
\varrho\,(x-\varrho)^n &= B_1^1(x)\,\varrho^{r-1} + B_2^1(x)\,\varrho^{r-2} + \cdots\cdots + B_{r-1}^1(x)\,\varrho + B_r^1(x)\\
\varrho^2\,(x-\varrho)^n &= B_1^2(x)\,\varrho^{r-1} + B_2^2(x)\,\varrho^{r-2} + \cdots\cdots + B_{r-1}^2(x)\,\varrho + B_r^2(x) \quad \cdots\cdots (3)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varrho^{r-1}(x-\varrho)^n &= B_1^{r-1}(x)\,\varrho^{r-1} + B_2^{r-1}(x)\,\varrho^{r-2} + \cdots\cdots + B_{r-1}^{r-1}(x)\,\varrho + B_r^{r-1}(x)
\end{aligned}$$

saa kan man paa samme vis bestemme en saadan med n ikke varierende positiv størrelse T, at hver koefficient i hver af de hele funktioner B er mindre end

$$T^n$$

Vi bemerker, at koefficienterne i alle funktionerne B er hele tal, og at graden af hver funktion B ikke overstiger n.

Sætter vi nu

$$U(x) = D_1(x)\,\varrho^{r-1} + D_2(x)\,\varrho^{r-2} + + \cdots D_{r-1}(x)\,\varrho + D_r(x) \quad \cdots (4)$$

hvor hvert D er en hel funktion af x, saa findes der ialt

$$(2k+1)^{(m+1)r} = M$$

— med hensyn paa koefficienterne i funktionerne D — forskjellige funktioner U, hvori graden af hver af de hele funktioner D ikke overstiger m, medens hver koefficient i samme er et helt positivt eller negativt tal, som i talværdi ikke er større end det vilkaarlig valgte hele positive tal k.

Af (3) og (4) faaes

$$(5) \cdots\cdots \quad (x-\varrho)^n\, U(x) =$$

$$[B_1^0 D_r + B_1^1 D_{r-1} + \ldots + B_1^{r-1} D_1]\,\varrho^{r-1} +$$

$$+ [B_2^0 D_r + B_2^1 D_{r-1} + \ldots + B_2^{r-1} D_1]\,\varrho^{r-2} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + [B_{r-1}^0 D_r + B_{r-1}^1 D_{r-1} + \cdots + B_r^{r-1} D_1]\,\varrho +$$

$$+ [B_r^0 D_r + B_r^1 D_{r-1} + \cdots + B_r^{r-1} D_1] =$$

$$= G_1(x)\,\varrho^{r-1} + G_2(x)\,\varrho^{r-2} + \cdots + G_{r-1}(x)\,\varrho + G_r(x)$$

hvor: $$G_v = B_v^0 D_r + B_v^1 D_{r-1} + \cdots + B_v^{r-1} D_1$$

Hver funktion $G(x)$ blir en hel funktion, hvis grad ikke overstiger $n+m$. Endvidere overstiger ingen koefficient i nogen af funktionerne G i talværdi det mindste af tallene

$$r(m+1)kT^n \text{ eller } r(n+1)kT^n$$

Lad os som grændse til ex. tage tallet

$$r(n+1)kT^n = N$$

Af bekvemmelighedshensyn kan vi gjerne forudsætte, at T^n for alle hele n er irrational.

Til hver af de M funktioner U svarer nu bestemte funktioner G.

Er μ et helt positivt tal, der ikke overstiger $n+m$, saa svarer der til de M funktioner U et tilsvarende antal lige eller forskjellige værdier af koefficienten foran x^μ i en vilkaarlig opgiven af funktionerne $G_1 G_2 \ldots G_{r-2}$, til ex. G_α.

Alle disse M koefficienter falder nu mellem $-N$ og N.

Idet h er et vilkaarlig valgt helt positivt tal, vil vi tænke os intervallet mellem $-N$ og N delt i h ligestore dele, hvis størrelse altsaa blev lig $\frac{2N}{h}$.

I et af disse intervaller maa der da falde mindst $\frac{M}{h}$ af de nævnte koefficienter.

Af de M funktioner U kan der følgelig udtages u, hvor $u \geqq \frac{M}{h}$, saaledes at om $E(x)$ er differentsen mellem hvilkesomhelst to af disse u funktioner U, saa vil i ligningen

$$(x-\varrho)^n E(x) = H_1(x)\,\varrho^{r-1} + \ldots + H_r(x)$$

koefficienten foran x^μ i H_α i talværdi være mindre end $\frac{2N}{h}$.

Er nu videre x^ν et fra ovennævnte x^μ forskjelligt potentsled i en vilkaarlig af funktionerne $G_1 \ldots G_{r-2}$, til ex. i G_β, hvor β ikke behøver at være forskjellig fra α, saa svarer til de u udtryk U ligesaa mange lige eller forskjellige værdier af koefficienten foran nævnte led x^ν.

I et af ovennævnte h intervaller maa der følgelig ligge mindst $\frac{u}{h}$ eller mindst $\frac{M}{h^2}$ af disse koefficienter.

Af de u udtryk U kan der saaledes atter udtages mindst $\frac{M}{h^2}$, saaledes at om $K(x)$ er differentsen mellem hvilkesomhelst to af disse udtryk, saa vil i ligningen

$$(x-\varrho)^n K(x) = L_1(x)\,\varrho^{r-1} + \ldots + L_r(x)$$

koefficienten foran x^ν i $L_\beta(x)$ i talværdi være mindre end $\frac{2N}{h}$.

Ved successive at anvende samme fremgangsmaade paa alle de $(m+n+1)(r-2)$ potentsled i funktionerne $G_1, G_2, \ldots,$ og G_{r-2}, kommer man til følgende resultat:

Idet

$$M > h^{(m+n+1)(r-2)}$$

kan man af de M udtryk U udtage mindst

$$\frac{M}{h^{(m+n+1)(r-2)}}$$

saadanne, at om $U_1(x)$ og $U_2(x)$ er to af disse udtryk, medens

$$(x-\varrho)^n U_1(x) = G_1^1(x)\varrho^{r-1} + G_2^1(x)\varrho^{r-2} + \ldots + G_{r-2}^1(x)\varrho^2 + G_{r-1}^1(x)\varrho + G_r^1(x)$$

$$(x-\varrho)^n U_2(x) = G_1^2(x)\varrho^{r-1} + G_2^2(x)\varrho^{r-2} + \ldots + G_{r-2}^2(x)\varrho^2 + G_{r-1}^2(x)\varrho + G_r^2(x)$$

da vil i ligningen

$$(x-\varrho)^n [U_1(x) - U_2(x)] = (x-\varrho)^n R(x) =$$

$$= [G_1^1 - G_1^2]\varrho^{r-1} + [G_2^1 - G_2^2]\varrho^{r-2} + \ldots + [G_{r-2}^1 - G_{r-2}^2]\varrho^2 + [G_{r-1}^1 - G_{r-1}^2]\varrho + [G_r^1 - G_r^2]$$

$$= C_1(x)\varrho^{r-1} + C_2(x)\varrho^{r-2} + \ldots + C_{r-2}(x)\varrho^2 + C_{r-1}(x)\varrho + C_r(x)$$

hver koefficient i hver af funktionerne C_1, C_2, ..., og C_{r-2} i talværdi være mindre end

$$\frac{2N}{h}$$

Var nu her

$$h > 2N$$

maatte følgelig alle de nævnte koefficienter, der jo ikke er brudne, være lig nul.

Man fik da

$$(x-\varrho)^n R(x) = C_{r-1}(x)\varrho + C_r(x)$$

Er følgelig ved givet n tallene m, k og h valgt slig, at

$$2r(n+1)kT^n < h < (2k+1)^{\frac{(m+1)r}{(m+n+1)(r-2)}}$$

eller har man et saa stort k, at

$$(2k+1)^{\frac{(m+1)r}{(n+m+1)(r-2)}} > (2r)(n+1)kT^n + 1 \quad \ldots\ldots (6)$$

saaledes at der existerer et h af ovennævnte art, da faar man altsaa paa ovenstaaende maade en ligning:

$$(7) \ldots\ldots \quad \varrho\, Q(x) - P(x) = (x-\varrho)^n R_m(x)$$

$$= (x-\varrho)^n [f_1(x)\varrho^{r-1} + f_2(x)\varrho^{r-2} + \ldots + f_{r-1}(x)\varrho + f_r(x)]$$

hvor $P(x)$ og $Q(x)$ er hele funktioner med hele koefficienter, som alle i talværdi er $< 2r(n+1)kT^n$, og hvis grad ikke overstiger $n+m$, medens funktionerne f er hele funktioner, hvis grad ikke er høiere end m, samtidig med at hver af sammes koefficienter i talværdi ikke er større end $2k$.

(6) kan løses, om man kan tilfredsstille betingelsen

$$k^{\frac{(m+1)r}{(n+m+1)(r-2)}} > kW^n \quad \text{eller}$$

$$k > W^{n \frac{1+\frac{n}{m+1}}{\frac{2}{r-2}-\frac{n}{m+1}}} \qquad \dots\dots\dots\dots (8)$$

hvor W er en fast af n uafhængig positiv størrelse $> T$, medens

$$m > \frac{r-2}{2} n - 1$$

II. Funktionerne $P(x)$ og $Q(x)$ kan ikke begge være nul for alle værdier af x.

Da maatte jo de ovenfor nævnte funktioner U_1 og U_2 her være identiske.

Af (7) faaes

$$\varrho Q(x) - P(x) = (x-\varrho)^n R^m(x)$$

$$\varrho Q'(x) - P'(x) = (x-\varrho)^{n-1} [(x-\varrho) R'_m(x) + nR_m(x)]$$

eller

$$P(x) Q'(x) - P'(x) Q(x) = (x-\varrho)^{n-1} \left[-Q'(x-\varrho)R_m + Q\left((x-\varrho) R'_m + nR^m\right)\right]$$

$$= (x-\varrho)^{n-1} \left[nQR_m + (x-\varrho)(QR'_m - Q'R_m)\right]$$

Da $F(x)$ er irreduktibel, faaes altsaa

$$P(x) Q'(x) - P'(x) Q(x) = F^{n-1}_{(x)} S(x) \qquad \dots\dots (9)$$

hvor $S(x)$ er en hel funktion, hvis grad ikke overstiger

$$2(n+m-1) - r(n-1) = 2m - (r-2)(n-1)$$

Er

(10) . . . . $m < (r-1)n$

saa kan ikke $S(x)$ være lig nul for alle værdier af x.

Isaafald blev jo, naar PQ ikke var identisk lig nul:

$$\frac{P'}{P} = \frac{Q'}{Q}$$

eller

$$P(x) = d\,Q(x)$$

hvor d var en rational konstant. Ifølge (7) fik man da

$$(\varrho - d)\, Q(x) = (x-\varrho)^n R_m(x)$$

$Q(x)$ blev saaledes delelig med $F^n(x)$, eller

$$n + m \overline{\gtrless} rn$$

hvilket strider mod den stillede forudsætning om m.

Er $m < (r-1)n$, kan mere specielt ingen af funktionerne $P(x)$ og $Q(x)$ være nul for alle værdier af x, da i modsat fald den anden af funktionerne ifølge (7) blev delelig med $F^n(x)$.

Lad graden af $S(x)$ være betegnet med γ. Vi har da

$$\gamma \overline{\lessgtr} 2m - (r-2)(n-1) \qquad \ldots\ldots (11)$$

Betegner nu p og q to vilkaarlig valgte hele tal, saa kan man ikke altid have

$$\frac{d^a}{dx^a} P\left(\tfrac{p}{q}\right) \frac{d^b}{dx^b} Q\left(\tfrac{p}{q}\right) - \frac{d^b}{dx^b} P\left(\tfrac{p}{q}\right) \frac{d^a}{dx^a} Q\left(\tfrac{p}{q}\right) = 0$$

naar a er en hvilkensomhelst af værdierne

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ \gamma,\ \gamma+1$$

og ligesaa b.

Man fik jo isaafald af

$$\frac{d^\delta}{dx^\delta} \left[P(x) Q'(x) - P'(x) Q(x)\right]_{x=\frac{p}{q}} = \frac{d^\delta}{dx^\delta} \left[F^{n-1}_{(x)} S(x)\right]_{x=\frac{p}{q}} = 0$$

naar δ var lig en hvilkensomhelst af værdierne

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ \gamma$$

$F^{n-1}(x) S(x)$ og altsaa ogsaa $S(x)$ fik saaledes $\gamma + 1$ lige rødder $\frac{p}{q}$.

Der findes altsaa i hvert fald to hele tal a og b mindre end $\gamma + 2$ og altsaa mindre end $(2m+1) - (r-2)(n-1)$, saaledes at man i ligningerne:

$$\varrho \frac{d^a}{dx^a} Q(x) - \frac{d^a}{dx^a} P(x) = \frac{d^a}{dx^a} \left[(x-\varrho)^n R_m(x)\right]$$

$$\varrho \frac{d^b}{dx^b} Q(x) - \frac{d^b}{dx^b} P(x) = \frac{d^b}{dx^b} \left[(x-\varrho)^n R_m(x)\right]$$

faar, at

$$P^a\left(\tfrac{p}{q}\right) Q^b\left(\tfrac{p}{q}\right) - P^b\left(\tfrac{p}{q}\right) Q^a\left(\tfrac{p}{q}\right) \gtrless 0$$

Vi skal saa se lidt nærmere paa disse to forskjellige tilnærmelsesværdier, man faar for ϱ, naar man her sætter $x = \frac{p}{q}$, hvor $\frac{p}{q}$ er en tilnærmelsesværdi for ϱ valgt uafhængig af det valgte n.

Vi ser for det første, at alle koefficienter i $Q^a(x)$ og $P^a(x)$ er delelige med $1.2.3.4 \ldots. a$, og at alle koefficienter i $Q^b(x)\, P^b(x)$ er delelige med $1.2.3.4 \ldots b$.

Idet vi sætter

$$\frac{1}{1.2.3 \ldots a} \frac{d^a}{dx^a} \left[(x-\varrho)^n R_m(x)\right] = (x-\varrho)^{n-a} A(x)$$

og

$$\frac{1}{1.2.3 \ldots b} \frac{d^b}{dx^b} \left[(x-\varrho)^n R_m(x)\right] = (x-\varrho)^{n-b} B(x)$$

hvor graden af $A(x)$ og $B(x)$ ikke overstiger m, gjælder det nu at finde grændser for talværdierne af $A(x)$ og $B(x)$.

Idet δ er er vilkaarligt af tallene a og b, faar vi

$$\frac{1}{1.2.3 \ldots \delta} \left[\varrho \frac{d^\delta}{dx^\delta} Q(x) - \frac{d^\delta}{dx^\delta} P(x)\right] =$$

$$\frac{(x-\varrho)^{n-\delta}}{1.2.3 \ldots \delta} \Bigg[(n)(n-1)\ldots(n-\delta+1)\, R_m(x) + \ldots\ldots$$

$$\frac{\delta(\delta-1)\ldots(\delta-h+1)}{1.2 \ldots. h} (n)(n-1)\cdots(n-[\delta-n]+1)(x-\varrho)^h R_m^h(x) + \cdots + (x-\varrho)^\delta R_m^\delta(x)\Bigg] =$$

$$= (x-\varrho)^{n-\delta}\Bigg[\frac{n(n-1)\ldots(n-\delta+1)}{1.2 \ldots. \quad \delta} R_m(x) + \cdots +$$

$$\frac{n(n-1)\ldots.(n-[\delta-n]+1)}{1.2 \ldots\ldots \quad (\delta-h)} \frac{R_m^h(x)}{1.2.3 \ldots h} (x-\varrho)^h + \cdots + \frac{R_m^\delta(x)}{1.2.3 \ldots \delta} (x-\varrho)^\delta\Bigg]$$

$$= \varrho X_\delta(x) - Y_\delta(x) \qquad \ldots\ldots (12)$$

hvor $X_\delta(x)$ og $Y_\delta(x)$ betegner to hele funktioner af $(n+m-\delta)$ grad i x og med hele koefficienter, hvoraf hver i talværdi er mindre end

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots.(m+n-\delta+1)}{1. \quad 2. \quad \ldots. \quad \delta} . 2r(n+1)kT^n < 2^{m+n+1} . r(n+1)kT^n$$

Har (1) uendelig mange løsninger i hele tal p og q, saa har $F(x)$ en reel rod ϱ. Vi kan gjerne, uden at almindeligheden svækkes, forudsætte, at $\varrho > 1$.

Havde nemlig $F(x)$ ingen saadan rod, saa var dette tilfælde med funktionen $x^r F\left(\frac{\pm 1}{x}\right) = F_1(x)$ eller med $F(-x) = F_2(x)$, hvor F_1 og F_2 ogsaa er hele funktioner af samme grad som $F(x)$.

Lad saa $\frac{p}{q}$ og $\frac{p_1}{q_1}$ være to saadanne brøker, at de tilfredsstiller (1) ɔ:

$$q^r F\left(\tfrac{p}{q}\right) = c, \qquad q_1^r F\left(\tfrac{p_1}{q_1}\right) = c \qquad \dots\dots (13)$$

Vi sætter nu $x = \frac{p}{q}$ i (12) og faar da

$$(14) \dots\dots \qquad \varrho X_\delta - Y_\delta =$$

$$(p-q\varrho)^{n-\delta}\left[\frac{n(n-1)\dots(n-\delta+1)}{1.2.\ \dots\ \delta} q^m R_m\left(\tfrac{p}{q}\right) + \dots\right.$$

$$+\frac{(n)(n-1)\dots(n-[\delta-h]+1)}{1.2.\ \dots\dots\ (\delta-h)} \frac{R_m^h\left(\frac{p}{q}\right) q^{m-h}}{1.2.3\dots h}(p-q\varrho)^h + \dots$$

$$\left.\dots\dots\dots + \frac{R^\delta\left(\frac{p}{q}\right) q^{m-\delta}}{1.2.3\dots\delta}(p-q\varrho)^\delta\right]$$

hvor $X_\delta = q^{n+m-\delta} X_\delta\left(\frac{p}{q}\right)$ og $Y_\delta = q^{n+m-\delta} Y_\delta\left(\frac{p}{q}\right)$.

X_δ og X_δ blir altsaa to hele tal.

Da $F(x)$ ikke har lige rødder, faaes af (13)

$$p - q\varrho = \frac{\varepsilon_0}{q^{r-1}} \qquad \dots\dots (15)$$

$$p_1 - q_1\varrho = \frac{\varepsilon_1}{q_1^{r-1}} \qquad \dots\dots (16)$$

hvor ε_0 og ε_1 er to størrelser, som i talværdi ligger under en fast ved c og koefficienterne i $F(x)$ bestemt grændse, der altsaa ikke varierer med valget af tallene p og q, p_1 og q_1.

Idet q er over en vis liden værdi, blir

$$|(p-q\varrho)^h| < 1$$

Videre faaes

$$\left|\frac{R_m^h\left(\frac{p}{q}\right) q^{m-h}}{1.2.3\dots h}\right| < \frac{m(m-1)\dots(m-h+1)}{1.\ 2.\ \dots\dots\ h} \cdot 2k\varrho^{r-1}.\,r\left[p^{m-h} + p^{m-h-1}q + \dots + q^{m-h}\right]$$

Her er

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-h+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ h} < (1+1)^m = 2^m$$

Videre blir, naar p og q er saa store, at

$$\left(\tfrac{p}{q}\right) < \varrho + 1$$

$$p^{m-h} + p^{m-h-1}q + \cdots + q^{m-h} = q^{m-h}\left[1 + \left(\tfrac{p}{q}\right) + \left(\tfrac{p}{q}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{p}{q}\right)^{m-h}\right] <$$

$$< q^{m-h}(\varrho+2)^{m-h}$$

eller

$$\left|\frac{R_m^h\left(\frac{p}{q}\right)q^{m-h}}{1.2\ldots h}\right| < k\left[2r\varrho^{r-1}.\,2^m.(\varrho+2)^m\right]q^m < k\zeta^m q^m$$

hvor ζ er en af m og h uafhængig fast størrelse.

Vi faar saaledes

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\delta+1)}{1.\ 2\ \ldots\ \delta}\,q^m R_m\left(\tfrac{p}{q}\right) + \cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-[\delta-h]+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots(\delta-h)}\,\frac{R_m^h\left(\frac{p}{q}\right)q^{m-h}}{1.2\ldots h}(p-q\varrho)^h + \cdots + \frac{R^\delta\left(\frac{p}{q}\right)q^{m-\delta}}{1.2\ldots\delta}(p-q\varrho)^\delta$$

$$< k\zeta^m q^m\left[1 + \cdots\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-[\delta-h]+1)}{1.2\ \ldots\ldots\ (\delta-h)} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-\delta+1)}{1.2\ \ldots\ \delta}\right] < k\zeta^m q^m 2^n$$

Er som forudsat

$$m < (r-1)n$$

medens p og q tilfredsstiller (1) og betingelsen

$$|p - q\varrho| < 1$$

saa faar vi ligningen

$$\varrho X_\delta - Y_\delta = (p-q\varrho)^{n-\delta}\,C_{,,}^n\,kq^m \qquad \ldots\ldots\ (17)$$

hvor $C_{,,}$ er en størrelse, der i talværdi ligger under en fast af n og δ uafhængig grændse.

Paa samme vis ser vi, at hvert af de hele positive eller negative tal X_δ og Y_δ i talværdi er mindre end

$$2^{m+n+1}\, r\,(n+1)\, T^n\, k\,(\varrho+2)^{n+m-\delta}\, q^{n+m-\delta}$$

eller mindre end et

$$D_{,,}^n \cdot k \cdot q^{n+m-\delta}$$

hvor $D_{,,}$ er en positiv størrelse, der ikke varierer med n, m og δ.

Af (17), (15) og (16) faaes

$$\left[\frac{p_1}{q_1} - \frac{\varepsilon_1}{q_1^r}\right] X_\delta - Y_\delta = \frac{\varepsilon_0^{n-\delta}\, C_{,,}^n\, k\, q^m}{q^{(r-1)\,(n-\delta)}}$$

eller

$$p_1 X_\delta - q_1 Y_\delta = \frac{D_{,}^n\, k q^{n+m-\delta}}{q_1^{r-1}} + \frac{C_{,}^n\, k q_1}{q^{(r-1)\,(n-\delta)-m}}$$

hvor $D_{,}$ og $C_{,}$ i talværdi er mindre end henholdsvis to faste positive størrelser D og C.

Det gjælder nu at afgjøre, om n og m kan vælges slig, at samtidig

$$\frac{D^n k\, q^{n+m-\delta}}{q_1^{r-1}} < \tfrac{1}{2}$$
$$\frac{C^n\, k\, q_1}{q^{(r-1)\,(n-\delta)-m}} < \tfrac{1}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots (18)$$

ved alle ikke negative hele værdier af $\delta < \gamma + 2$.

Isaafald blev jo

$$|\, p_1 X_\delta - q_1 Y_\delta \,| < 1$$

eller, da X_δ og Y_δ er hele tal, faaes for begge værdier a og b af δ:

$$\frac{X_\delta}{Y_\delta} = \frac{q_1}{p_1}$$

eller

$$X_a Y_b - X_b Y_a = 0$$

hvilket jo er umuligt.

Vi bemærker, at da

$$\delta \gtreqless \gamma + 1 \gtreqless 2m + 1 - (r-2)(n-1)$$

saa er ulighederne (18) tilfredsstillet, om man kan tilfredsstille de nye uligheder

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{D^n k q^{n+m}}{q_1^{r-1}} < \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{C^n k q_1}{q^{(r-1)(n+(r-2)(n-1)-2m-1)-m}} < \frac{1}{2}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (19)$$

saaledes at $(r-1)\left[(n-1)(r-1)-2m\right] > m$.

Kan ulighederne (19) tilfredsstilles, om man for m overalt i (19) skriver:

$$(r-2)\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{\theta}$$

hvor θ er et vilkaarligt tal $> 4 - \frac{2}{r}$, saa vil de ogsaa tilfredsstilles, om man i (19) for m sætter det største hele tal, som indeholdes i

$$(r-2)\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{\theta}$$

Indsættes ovenstaaende værdi for m i (19), faaes ulighederne

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{D^n k q^{\left[(n-1)\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)+1\right]}}{q_1^{r-1}} < \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{C^n k q_1}{q^{(n-1)\left(\frac{r}{2}-\frac{2r-1}{\theta}\right)}} < \frac{1}{2}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (20)$$

Ved opgivet θ faaes efter (8) en grændse for k. Betingelsen om, at $m < (r-1)n$, er fyldestgjort, naar

$$1 < n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{\theta}\right) + \left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)$$

Vi har nu

$$m + 1 > (r-2)\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{\theta} = (n-1)\left[\frac{r-2}{2} + \frac{1}{\theta}\right]$$

Vælger vi derfor

$$k > W^{n \dfrac{1 + \dfrac{n}{(r-2)\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{\theta}}}{\dfrac{2}{r-2} - \dfrac{n}{(r-2)\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{\theta}}}}$$

eller

$$k > W^{n \frac{1+\frac{\theta}{2}r+\frac{\theta}{n-1}}{\frac{2}{r-2}-\frac{\theta}{n-1}}}$$

saa vil ogsaa (8) være tilfredsstillet, om man for m vælger det største hele tal, som indeholdes i

$$(n-1)\left[\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right]$$

Er nu θ en hvilkensomhelst nok saa stor opgiven størrelse, saa maa vi holde os til saadanne n, at $\frac{\theta}{n-1}$ blir en brøkdel af $\frac{2}{r-2}$.

Vi kan da tilfredsstille (8) ved at vælge

$$k = Z^{n\theta}$$

hvor Z er en fast størrelse, der ikke varierer med n, naar n kommer over en vis mindre ved θ bestemt værdi.

Det gjælder nu blot at finde et saadant n, at samtidig

$$q_1^{r-1} > 2\,D^n\,Z^{n\theta}\,q^{\left[(n-1)\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)+1\right]}$$

$$q^{(n-1)\left(\frac{r}{2}-\frac{2r-1}{\theta}\right)} > 2\,C^n\,Z^{n\theta}\,q_1$$

Her maa altsaa

$$(21)\ldots\quad \frac{\log q_1+\log 2\,C+\theta\log Z}{\left[\frac{r}{2}-\frac{2r-1}{\theta}\right]\log q-\log C-\theta\log Z} < n-1 < \frac{(r-1)\log q_1-\log 2\,D-\theta\log Z-\log q}{\left[\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right]\log q+\theta\log Z+\log D}$$

Er nu $r > 2$ kan man vælge et saa stort positivt θ, at

$$\frac{\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}}{\frac{r}{2}-\frac{2r-1}{\theta}} < r-1$$

Men havde da (1) uendelig mange løsninger i hele tal, saa kunde man jo bestemme to saadanne (p, q) og (p_1, q_1), at differentsen

$$\frac{(r-1)\log q_1-\log q-\log 2D-\theta\log Z}{\left[\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right]\log q+\theta\log Z+\log D}-\frac{\log q_1+\log 2\,C+\theta\log Z}{\left[\frac{r}{2}-\frac{2r-1}{\theta}\right]\log q-\log C-\theta\log Z}$$

blev større end 1, samtidig med at subtraktor blev større end en vilkaarlig opgiven positiv størrelse. Men da laa der et helt tal $n-1$ over en opgiven størrelse mellem de to grændser i (21). Da betingelserne i (18) saaledes blev tilfredsstillet, er herved vort theorem bevist.

Nordstrand 2den januar 1908.

Axel Thue.

Ovenfor har vi altsaa bevist følgende theorem.

Er θ en vilkaarlig valgt positiv størrelse til ex. > 4, medens $r > 2$, saa kan man for hvert helt n over en vis grændse bestemme saadanne hele funktioner $P_n(x)$, $Q_n(x)$ og $R_n(x)$ af x, at

$$\varrho\, Q_n(x) - P_n(x) = (x-\varrho)^{2n+1} R_n(x)$$

hvor koefficienterne i P_n og Q_n er hele tal, samtidig med at graden af R_n er lig det største hele tal, som findes i

$$n\left[r - 2 + \frac{2}{\theta}\right]$$

og saaledes, at hver koefficient i hver af de tre funktioner i talværdi er mindre end et

$$H^n$$

hvor H er en positiv størrelse, der kun er bestemt ved θ og koefficienterne i $F(x)$.

Hvorledes vi ved dette theorem gjennem ovenstaaende raisonnement betydelig kan generalisere vor hovedsats og herigjennem faa grændsen for nævnerne i kjædebrøksudviklingen for ϱ, skal vi vise i en ny afhandling.

A. T.

Trykt 12te december 1908.